

Решение алгебраических задач с параметрами методами динамической геометрии

Корчажкина Ольга Максимовна

к.т.н., старший научный сотрудник

Институт кибернетики и образовательной информатики им. А.И. Берга

ФИЦ «Информатика и управление» РАН

31.01.2023

—

01.02.2023

Рассмотрим:

- *виды* задач с параметрами;
- *различие* между параметром и неизвестной величиной (корнем);
- *логические действия* при решении задач с параметрами;
- *ряд правил* решения задач с параметрами;
- *когда поможет* динамическая геометрия;
- *решаем* алгебраические задачи с параметром в формате ЕГЭ;
- *сочетание* аналитических методов и методов динамической геометрии;
- *перспективы* использования методов динамической геометрии.

Виды задач с параметрами

- при каких значениях параметра уравнение (система уравнений) имеет заданное число корней

- 2017: два корня
$$\begin{cases} (y^2 - xy + x - 3y + 2)\sqrt{x+3} = 0 \\ a - x - y = 0 \end{cases}$$

- 2021: два различных корня $|x^2 - a^2| = |x - a|\sqrt{x^2 - 4ax + 5a}$

- 2022-2023: один корень для положительных значений параметра

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

- 2018: два корня

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = a(a - 3) \end{cases}$$

Различие между параметром и неизвестной величиной (корнем уравнения)

- **Параметры** диктуют условия, т.е. в задаче они играют доминирующую роль, а неизвестные величины – второстепенную
- **Параметры** вносят дополнительные ограничения в условие задачи, влияющие на выбор способа её решения
- **Параметры** создают семейство задач, однотипных по виду (аналитической записи), но способных вносить различное содержание в каждый диапазон значений параметра

Логические действия при решении задач с параметрами

- Задачи с параметрами – многовариантные задачи, требующие учёта определённых ограничений, которые накладываются на корни уравнения или системы уравнений (условий существования решений)
- Обычно целью решения задач с параметрами являются не корни уравнения, а значения параметра, которые нужно найти при заданных **условиях**
- Направление поиска решения задаётся поведением параметров при заданных **условиях**
- Алгебраическое или графическое решение осуществляется путём рассуждений об **условиях** с использованием логических операторов булевой алгебры или их синтаксических значений на естественном языке: **если ..., то/тогда...; что если ...; и ..., и ...; или..., или ...; без...; не...; кроме...** и пр.

Ряд правил решения задач с параметрами

- Анализ условия задачи через определение области допустимых значений параметра с учётом особых точек (особенно если есть модули и квадратные корни)
- Рассмотрение условия задачи в каждом диапазоне допустимых значений параметра на предмет наличия смысла (если задача не имеет смысла, то к решению не приступают)
- Рассмотрение «пограничных» значений параметра (особых точек), нарушающих монотонность изменения параметров
- Иногда полезно бывает найти не только значения параметров, но и соответствующие корни уравнения или системы, чтобы проверить, действительно ли не нарушены условия задачи

Когда поможет динамическая геометрия

- Когда аналитическая запись задачи даёт возможность визуализации условия (признаки зрелищности)
- Когда необходимо добиться как детального понимания, так и представления об общей картине решения задачи (задачной ситуации)
- Когда требуется доказать, что выбрано верное направление поиска решения (получить дополнительное подтверждение выдвинутым гипотезам)
- Когда требуется найти «подсказку»
- Когда необходимо предложить для решения новые классы задач исследовательского характера

Когда поможет динамическая геометрия

Когда требуется:

- исследовать переходные процессы в диапазонах изменения параметра (в режиме «сериала») и в особых точках (на границах диапазонов, в вырожденных случаях или при искомым значениях параметра);
- проверить факт наличия/отсутствия корней в динамике для различных диапазонов значений параметра;
- наглядная проверка промежуточных и итоговых результатов решения задачи;
- сравнить различные способы аналитического решения задачи;
- исследовать новые качества, приобретённые задачей в ходе анализа условия или в процессе решения, а также неявные свойства и закономерности, которые затруднительно получить аналитически.

Решаем алгебраические задачи с параметром в формате ЕГЭ

- Задача № 17 из демоверсии 2021-2023 гг.

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ (x + 2)^2 + y^2 = p^2 \end{cases}$$

- Задача № 17 из демоверсии 2018 г.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p^2 \\ xy = p(p - 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 3p(p - 2) \\ xy = p(p - 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - y)^2 = -p(p - 6) \\ xy = p(p - 3) \end{cases}$$

Решаем алгебраические задачи с параметром в формате ЕГЭ

- Задача № 17 из демоверсии 2021-2023 гг.

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9 & \text{две окружности} \\ (x + 2)^2 + y^2 = p^2 & \text{одна окружность} \end{cases}$$

- Задача № 17 из демоверсии 2018 г.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p^2 & \text{одна окружность} \\ xy = p(p - 3) & \text{гипербола} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 3p(p - 2) \\ xy = p(p - 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - y)^2 = -p(p - 6) \\ xy = p(p - 3) \end{cases}$$

линейная функция
гипербола

Задача № 17 из демоверсии 2021-2023 гг.

Найдите все положительные значения p , при которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ (x + 2)^2 + y^2 = p^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

- Анализ: а) при $x \geq 0$ имеем окружность a_1 радиуса 3 с центром в т. $C_1(5; 4)$;
б) при $x < 0$ имеем окружность a_2 радиуса 3 с центром в т. $C_2(-5; 4)$;
в) при любых x и y имеем окружность b радиуса p с центром в т. $C(-2; 0)$.

[Лист 1]

- Найдите все положительные значения p , при которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ (x + 2)^2 + y^2 = p^2 \end{cases}$$

не имеет решений, имеет одно, два, три или четыре решения.

- Насколько общей является картина с тремя решениями: когда окружность b имеет точку касания с одной из окружностей (a_1 или a_2), обязательно ли она проходит через центр другой окружности?
- Как нужно изменить второе уравнение, чтобы система имела два решения, расположенные в разных квадрантах?

[Лист 1]

[Лист 2]

Задача № 17 из демоверсии 2018 г.

При каких значениях p система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p^2 \\ xy = p(p - 3) \end{cases}$$

имеет два корня? Найдите эти корни (расширение задачи).

Анализ: 1) при $x = 0$ задача не имеет смысла;

2) сразу имеем **две особые точки**:

- [Лист 3]**
- а) при $p = 0$ окружность вырождается в точку, а гипербола – в оси координат, и получаем **один** корень $(0; 0)$;
 - б) при $p = 3$ гипербола вырождается в оси координат, и получаем **четыре** корня $(\pm 3; 0)$ и $(0; \pm 3)$ – координаты точек пересечения ветвей гиперболы и окружности;

Гипотеза: два корня – координаты точек касания ветвей гиперболы и окружности.

[Лист 4]

Задача № 17 из демоверсии 2018 г.

При каких значениях p система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p^2 \\ xy = p(p - 3) \end{cases}$$

имеет два корня? Найдите эти корни (расширение задачи).

Решение:

а) $x^2 = \frac{p^2 \pm p\sqrt{3(p-2)(p-6)}}{2}$;

[Лист 5]

б) при $p = 2$ имеем два равных по модулю корня разных знаков $(\pm\sqrt{2}; \mp\sqrt{2})$;

в) при $p = 6$ имеем два равных по модулю корня одинаковых знаков: $(\pm\sqrt{18}; \pm\sqrt{18})$.

Задача № 17 из демоверсии 2018 г.

При каких значениях p система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p^2 \\ xy = p(p - 3) \end{cases}$$

имеет два корня? Найдите эти корни (расширение задачи).

Проверить на динамических чертежах, существуют ли решения системы в пяти диапазонах значений параметра (общая картина):

- 1) $p < 0$.
- 2) $0 < p < 2$;
- 3) $2 < p < 3$;
- 4) $3 < p < 6$;
- 5) $p > 6$;

[Лист 6]

Задача № 17 из демоверсии 2018 г.

При каких значениях p система
$$\begin{cases} (x + y)^2 = 3p(p - 2) \\ xy = p(p - 3) \end{cases}$$

имеет два корня? Найдите эти корни (расширение задачи).

Анализ: сразу имеем **три особые точки**:

- а) если $p = 0$, то пара прямых вырождается в одну $y = -x$, а гипербола – в ось координат, и получаем **один** корень $(0; 0)$;
- б) если $p = 2$, то пара прямых вырождается в одну $y = -x$, и получаем **два** корня $(\pm\sqrt{2}; \mp\sqrt{2})$ на пересечении с ветвями гиперболы $xy = -2$;
- в) если $p = 3$, то ветви гиперболы вырождаются в ось координат, и получаем **четыре** корня $(\pm 3; 0)$ и $(0; \pm 3)$.

Задача № 17 из демоверсии 2018 г.

При каких значениях p система
$$\begin{cases} (x + y)^2 = 3p(p - 2) \\ xy = p(p - 3) \end{cases}$$

имеет два корня? Найдите эти корни (расширение задачи).

Гипотеза: если $p \neq 0$ и $p \neq 2$, то два корня могут быть координатами точек касания ветвей гиперболы и пары прямых.

Есть ли значения p , при которых это возможно?

Решение: а)
$$\begin{cases} p = \frac{(x+y)^2}{3(p-2)} \\ p = \frac{xy}{(p-3)} \end{cases} \implies D = p^2 - 4(p-3)^2 = -3(p-2)(p-6) = 0$$
 ещё одна ОТ

[Лист 7] б) при $p = 6$ имеем два равных по модулю корня одинаковых знаков: $(\pm\sqrt{18}; \pm\sqrt{18})$.

Сочетание аналитических методов и методов динамической геометрии

- Построение динамической модели задач с параметрами возможно только после первичного анализа условия с привлечением аналитических методов
- Динамическая модель используется для верификации аналитического решения и поиска новых качеств задачи
- Если в результате верификации обнаруживается противоречие между аналитическим и динамическим решением задачи, то решение задачи пересматривают на обоих этапах – и аналитическом, и динамическом
- Если в ходе исследования динамической модели обнаружены новые качества задачи, то их следует подтверждать аналитически, т.е. проверять, удовлетворяют ли они условию задачи

Перспективы использования методов динамической геометрии

Динамическая геометрия позволяет:

- добиться более глубокого понимания задачной ситуации и полученного решения за счёт их наглядного представления;
- выявить развитие закономерностей и скрытых связей между компонентами (параметрами и неизвестными величинами) задачи;
- научиться восприятию математических категорий в динамике;
- вывести рутинные и исследовательские задачи на новый уровень представления и восприятия.



**СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!**