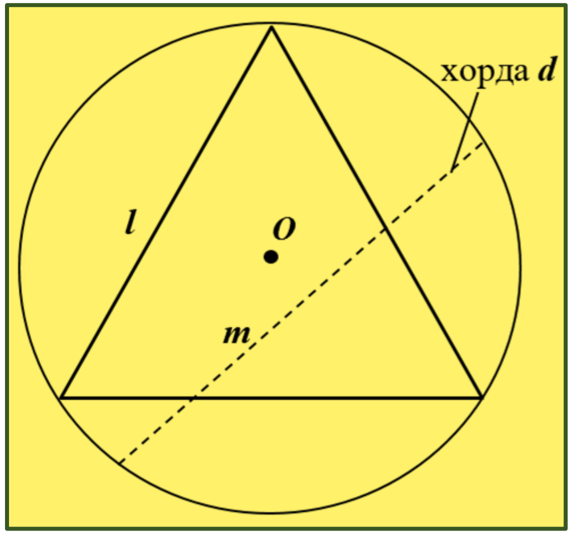


Разрешение *парадокса Бертрана* с помощью интерактивного ресурса *«1С:Математический конструктор 6.0»*

О.М. Корчажкина,

к.т.н., с.н.с.

Институт кибернетики и образовательной информатики

ФИЦ «Информатика и управление» РАН, г. Москва

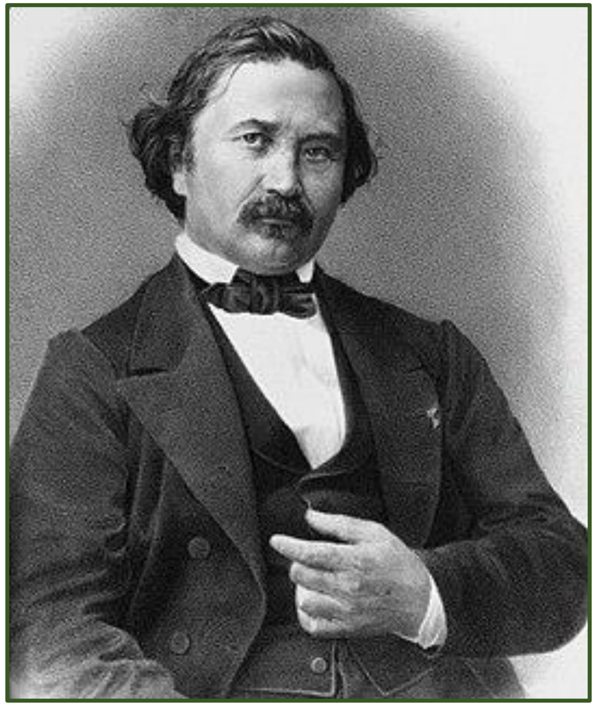
О чём будем говорить?

- о проблемах математического образования в старшей школе;
- о способах решения вероятностной задачи, известной как «парадокс Бертрана», с помощью конструкторской творческой среды «1С:Математический конструктор 6.0»;
- о вероятностных моделях для экспериментальной проверки двух дополнительных способов решения задачи с помощью конструкторской творческой среды «1С: Математический конструктор 6.0»;
- о решении задачи «Парадокс Бертрана» на уроках курса «Теория вероятностей и математическая статистика» в старшей школе.

Проблемы математического образования в старшей школе

Согласно «Концепции развития математического образования в Российской Федерации», утверждённой распоряжением Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. № 2506-р, в условиях перехода к конвергентным технологиям и повышения престижа инженерно-технических специальностей приоритетными целями общего математического образования объявлено формирование и развитие способностей учащихся средней школы:

- к логическому мышлению, конструированию, коммуникации и взаимодействию на широком математическом материале (от геометрии до программирования);
- к поиску решений принципиально новых математических задач, эксперименту и наблюдению, формированию внутренних (мысленных) представлений и моделей для математических объектов, формулированию и проверке гипотез, преодолению интеллектуальных препятствий;
- к реальной математике: математическому моделированию (построению модели реальности и интерпретации результатов), применению математики, в том числе, с использованием ИКТ.

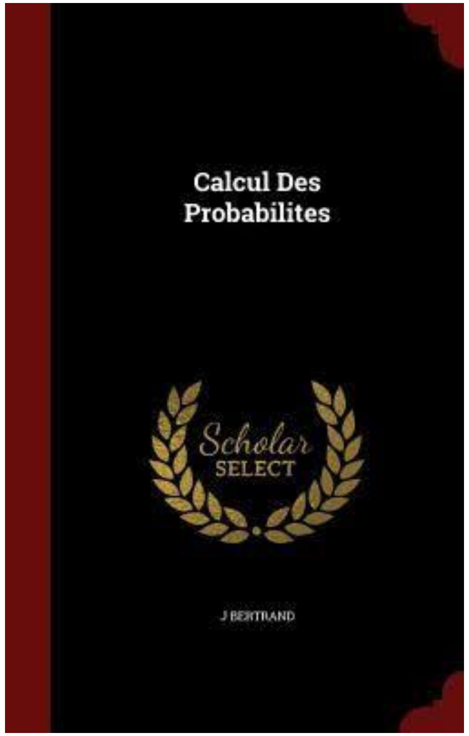


Французский математик Жозеф Луи Бертран (1822-1900)

«Calcul des probabilités»

(«Исчисление вероятностей»)

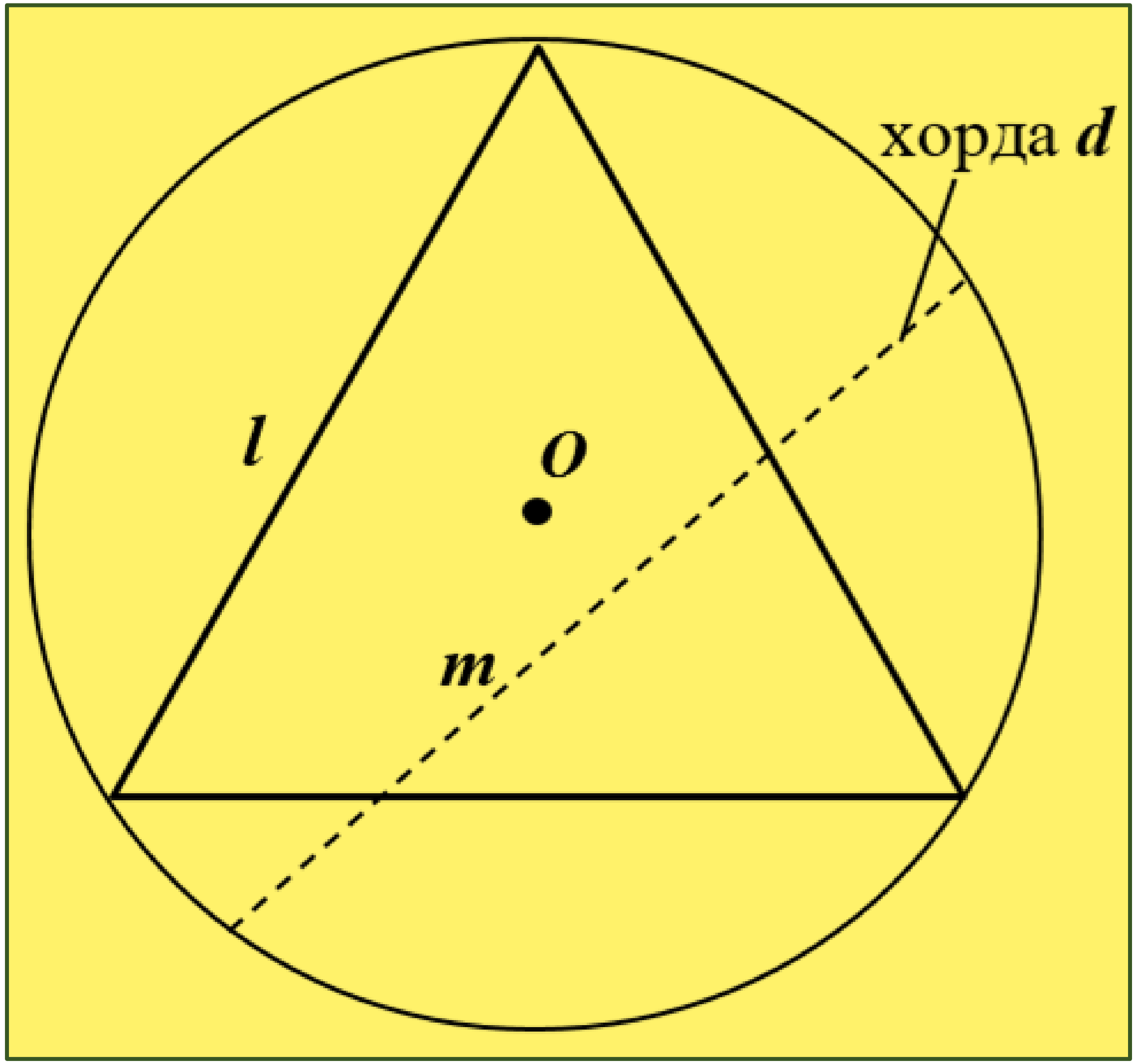
Paris : Gauthier-Villars et fils, 1889



Результат разрешения парадокса Бертрана зависит от выбора механизма или способа случайных построений, поэтому подобную задачу можно отнести к области теории вероятностей.

Задача была предложена в качестве примера того, что вероятность наступления события не может быть чётко определена без выбора первоначальных допущений, служащих отправной точкой рассуждения.

Условие задачи «Парадокс Бертрана»



В окружность единичного радиуса вписан равносторонний треугольник с длиной стороны l. Проведём внутри окружности произвольную хорду d и обозначим её длину через m.

Задача состоит в определении вероятности $P_{m>l}$ того, что $m > l$, т.е. вероятности того, что длина произвольной (наугад выбранной) хорды d единичной окружности превышает длину стороны вписанного в неё равностороннего треугольника.

Примечание: вероятность $P_{m>l}$ указывает, какую долю составляет частота наступления события $m > l$ в общей череде событий всех возможных m, стремящихся к бесконечности, при фиксированном событии l.

Специфика математических парадоксов

- они логически выводятся из известных аксиом и теорем;
- но получаемый результат настолько противоречит обыденному сознанию или интуитивному знанию, что может поставить под сомнение весь спектр математических инструментов, применяемый для их решения;
- выход – либо проведение эксперимента, либо поиск концептуальных противоречий в условии или ходе решения задачи, а иногда и то, и другое.

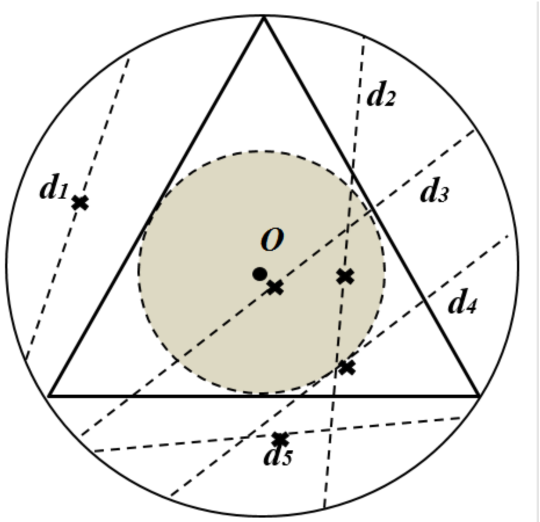
Применение обучающих творческих сред и виртуальных лабораторий

- вовлечение пространственного воображения учащихся;
- дополнительная визуальная опора, облегчающая учащимся поиск решения задачи за счёт демонстрации исследуемых процессов и явлений в движении и развитии;
- помощь учащимся в осуществлении интеллектуальной обработки, структурировании и представлении информации в виде различных интерактивных моделей;
- экономия времени учителя и учащихся;
- пробуждение интереса учащихся к изучению предмета;
- мотивация к осуществлению учащимися учебно-познавательной деятельности;
- рациональная расстановка акцентов на значимых позициях в процессе формулировки и решения учащимися задач разного уровня сложности.

Классические способы решения задачи «Парадокс Бертрана»

<u>Первое решение</u>

«Метод случайной середины»

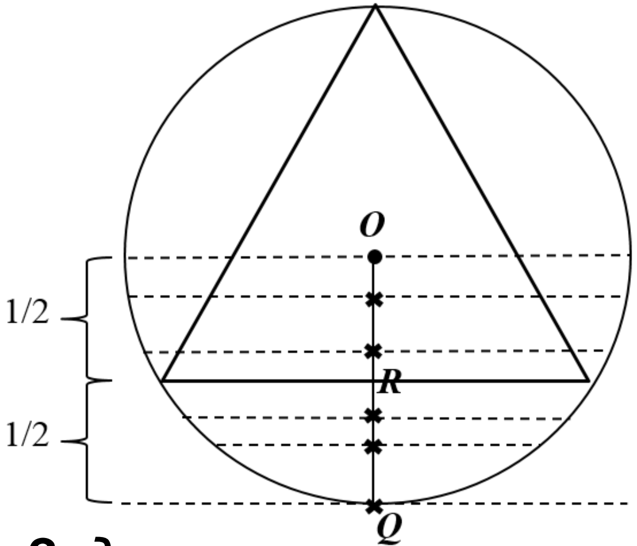


Задачная ситуация: **произвольное построение хорд и определение вероятности $P_{m>l}$ через соотношение площадей.**

Ответ: **$P_{m>l} = 1/4$.**

<u>Второе решение</u>

«Метод случайного радиуса»

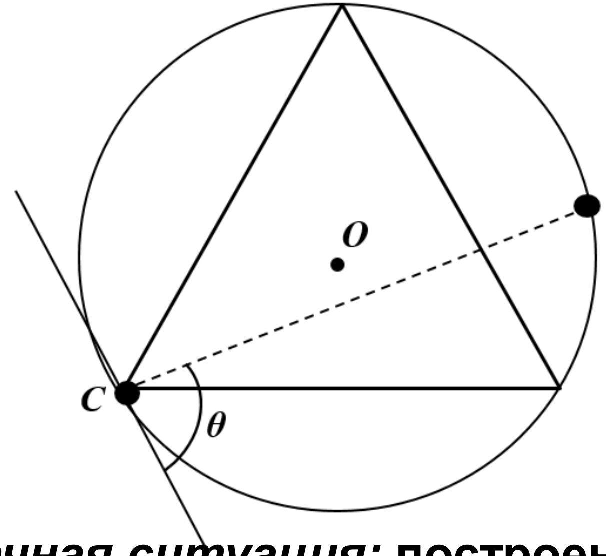


Задачная ситуация: **построение хорд, параллельных друг другу и определение вероятности $P_{m>l}$ через соотношение линейных размеров.**

Ответ: **$P_{m>l} = 1/2$.**

<u>Третье решение</u>

«Метод случайных концов»

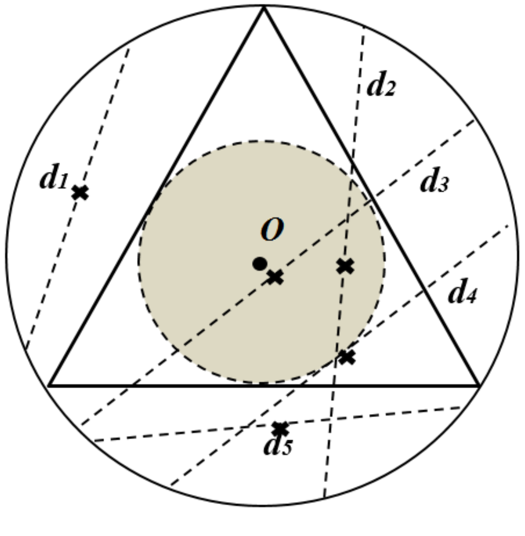


Задачная ситуация: **построение хорд, соединяющих концы отрезков, лежащие на единичной окружности, и определение вероятности $P_{m>l}$ через соотношение угловых величин.**

Ответ: **$P_{m>l} = 1/3$.**

Геометрическое место точек – середин хорд

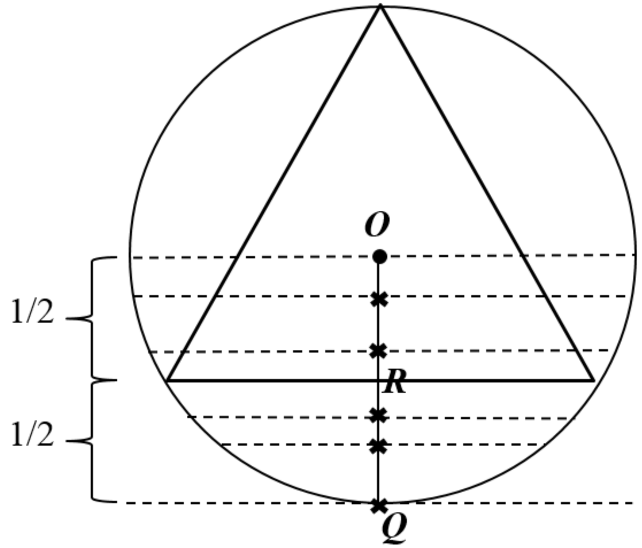
<u>Первое решение</u>
«Метод случайной середины»



Геометрическое место середин хорд **– круг $R_{1/2}$ =1/2, вписанный в равносторонний треугольник.**

Решение: $S_R = \pi R^2$.
$P_{m>l} = S_{R=1/2} / S_{R=1} = (\pi/4) / \pi = 1/4$.

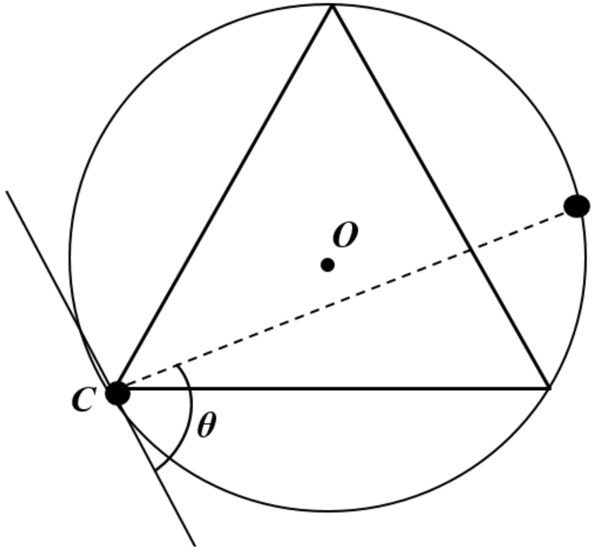
<u>Второе решение</u>
«Метод случайного радиуса»



Геометрическое место середин хорд **– радиус единичной окружности.**

Решение: $R_{1/2} = 1/2$; $R_1 = 1$.
$P_{m>l} = R_{1/2} / R_1 = 1/2$.

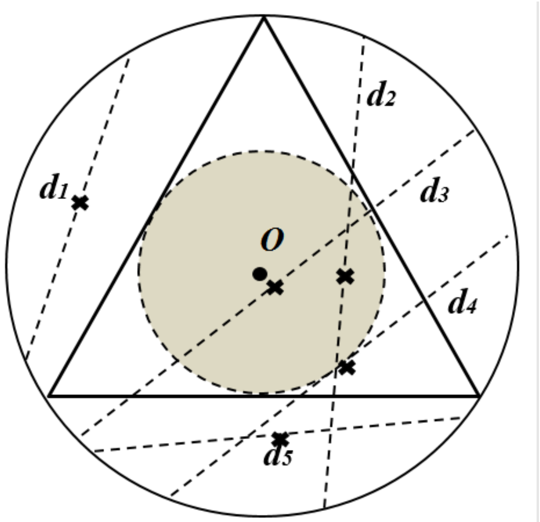
<u>Третье решение</u>
«Метод случайных концов»



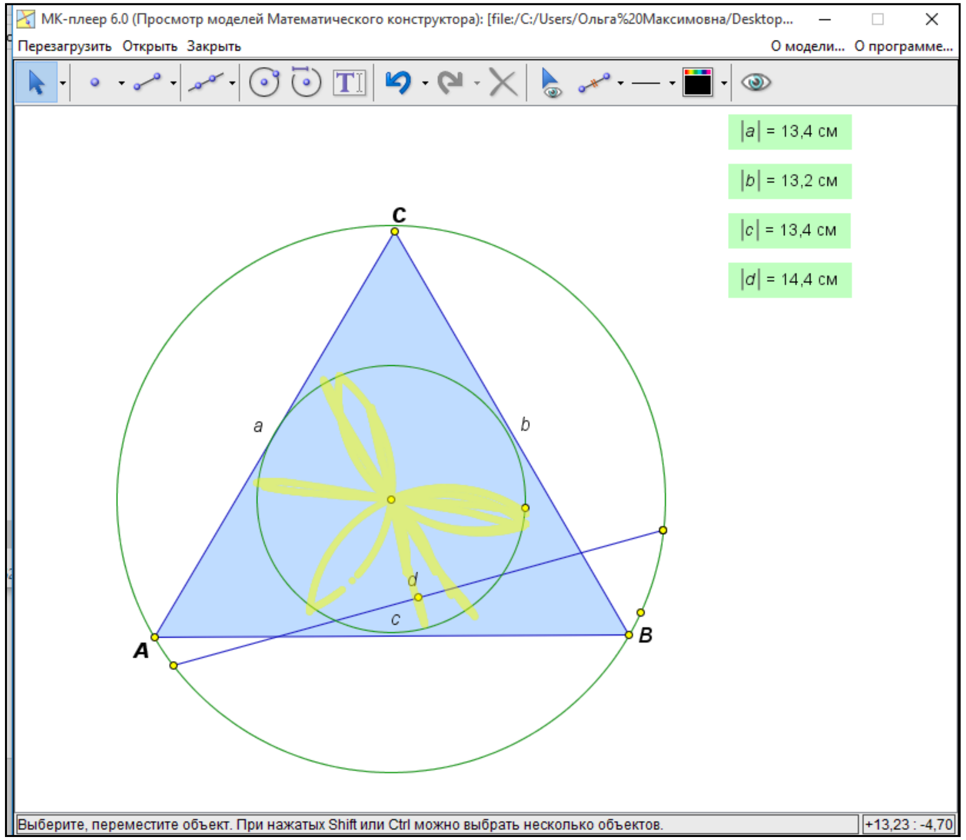
Геометрическое место середин хорд **– дуга внутри угла вписанного равностороннего треугольника**
Решение: $P_{m>l} = 60°/180°$

Геометрическое место точек – середин хорд

<u>Первое решение</u>
«Метод случайной середины»



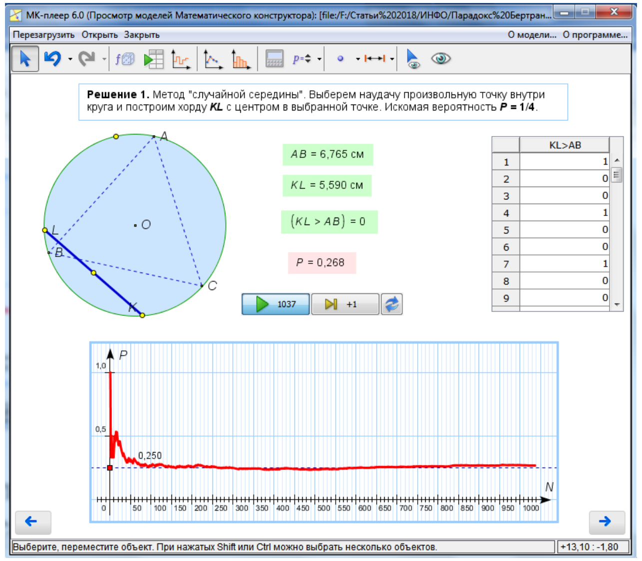
***Геометрическое место середин хорд* – круг $R_{1/2}$ =1/2, вписанный в равносторонний треугольник.**
***Решение:* $S_R = \pi R^2$.**
$P_{m>l} = S_{R=1/2} / S_{R=1} = (\pi/4) / \pi = 1/4$.



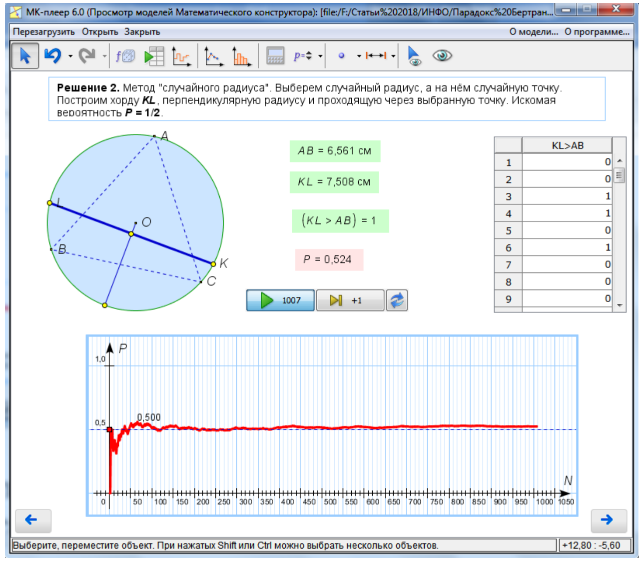
файл «Первое динамика.mkz»

Виртуальные эксперименты

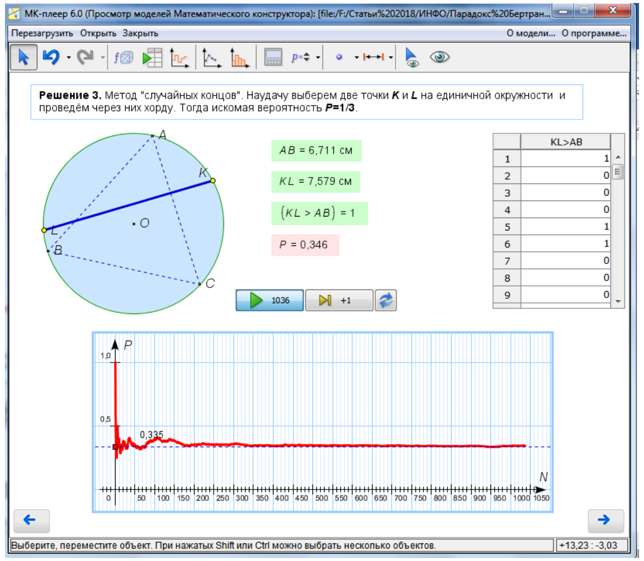
Первое решение
«Метод случайной середины»



Второе решение
«Метод случайного радиуса»



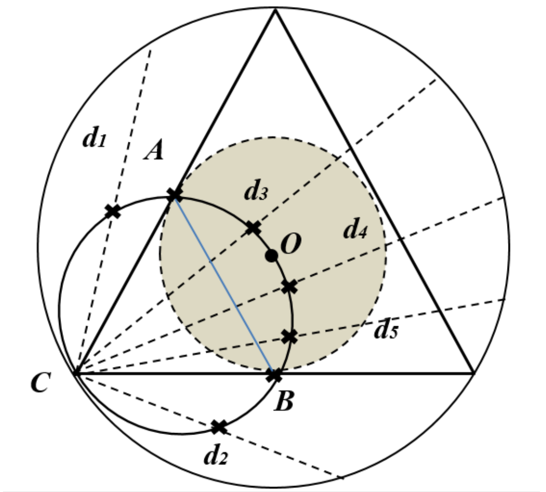
Третье решение
«Метод случайных концов»



файл «5 решений Парадокса Бертрана.mkz»

Дополнительные способы решения задачи «Парадокс Бертрана»

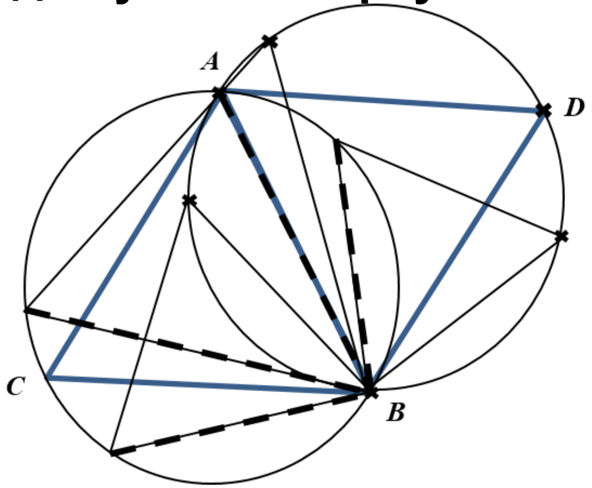
Четвёртое решение
«Метод одного случайного конца»



Задачная ситуация: **построение хорд, исходящих из общей точки на единичной окружности, и определение вероятности $P_{m>l}$ через соотношение длин дуг окружности, представляющей собой ГМ середин хорд.**

Ответ: $P_{m>l} = 1/3$.

Пятое решение
«Метод случайных треугольников»

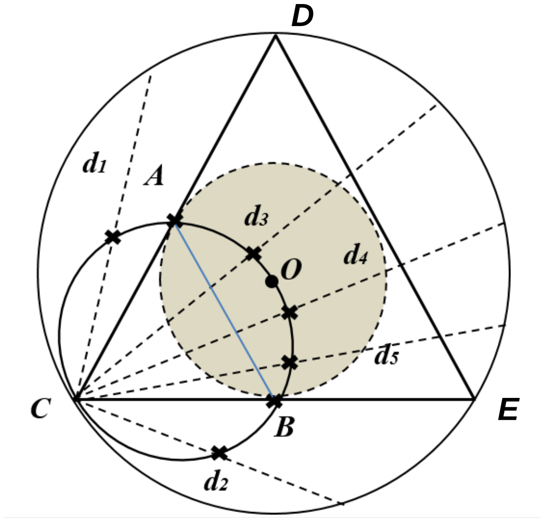


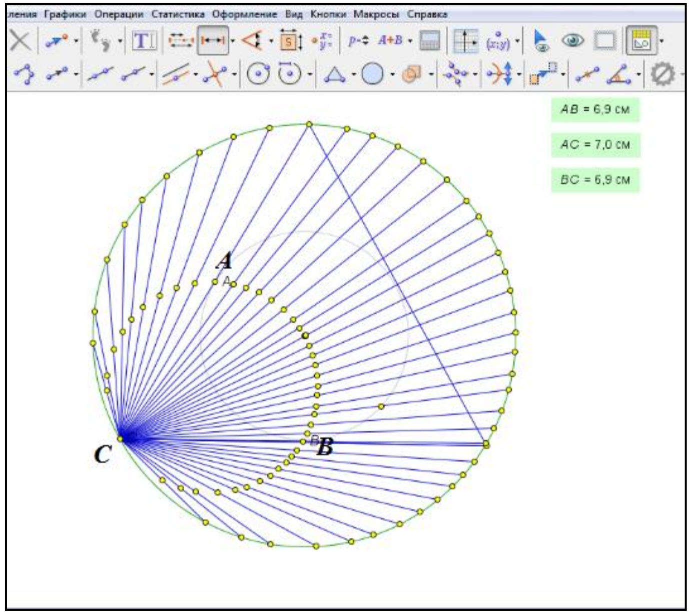
Задачная ситуация: **из вершины вписанного в единичную окружность равностороннего треугольника строится «веер» случайных хорд, на каждой из которых как на основании строится равносторонний треугольник. Вероятность $P_{m>l}$ определяется через соотношение длин дуг окружности, представляющей собой ГМ вершин равносторонних треугольников.**

Ответ: $P_{m>l} = 1/3$.

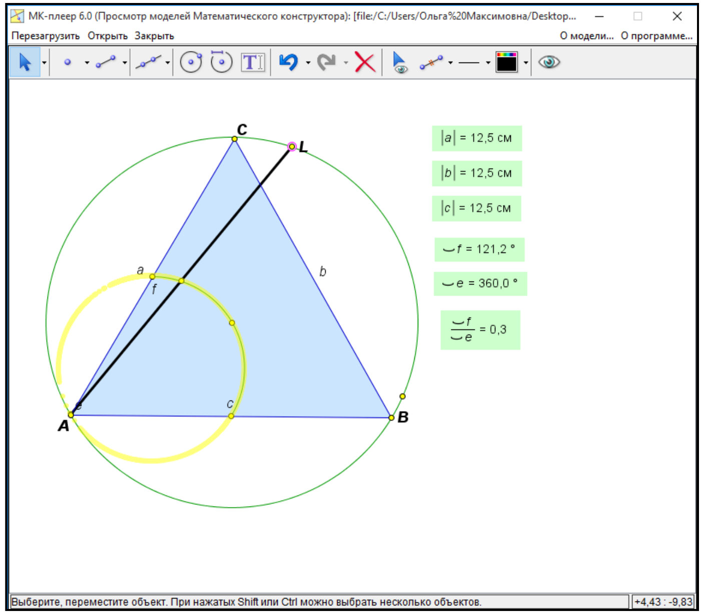
Геометрическое место точек – середин хорд

Четвёртое решение
«Метод одного случайного конца»





файл «Четвёртое чертёж.mkz»

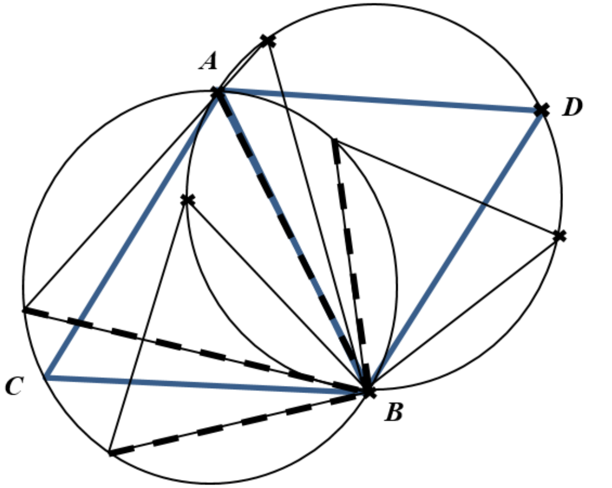


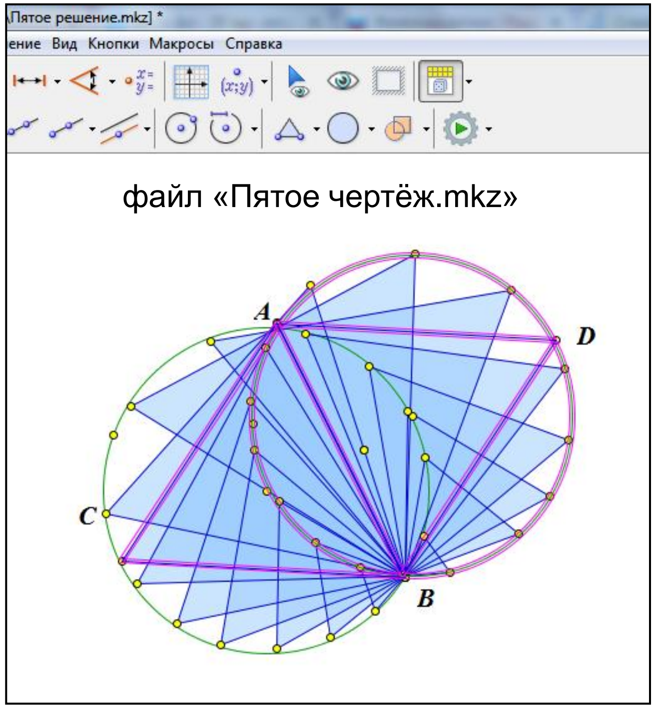
файл «Четвёртое динамика.mkz»

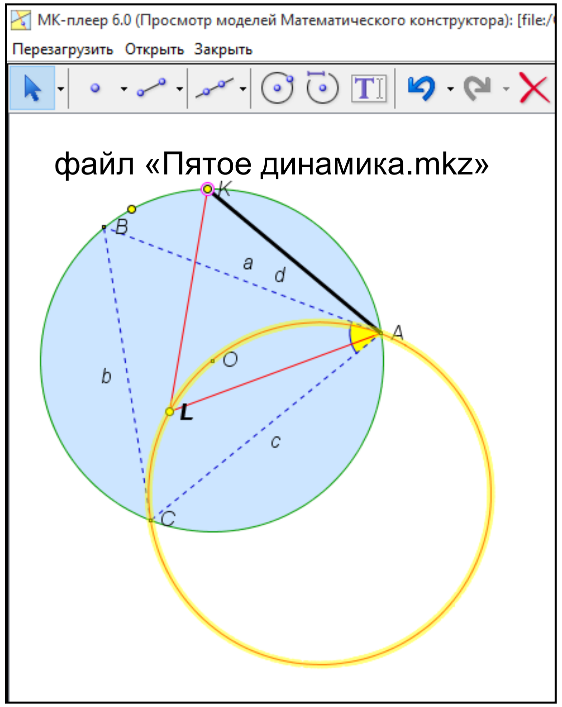
Геометрическое место середин хорд **– дуга окружности с** $R_{1/2}$ **=1/2, ограниченная двумя смежными сторонами одного из углов равностороннего треугольника, вписанного в единичную окружность.**
Решение: **$\Delta ABC \sim \Delta DEC$, $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$. Длина $\smile AB$ составляет 1/3 от длины окружности $R = 1/2$ – ГМ середин хорд. Отсюда $P_{m>l}$ =1/3.**

Геометрическое место точек – вершин треугольников

Пятое решение
«Метод случайных треугольников»







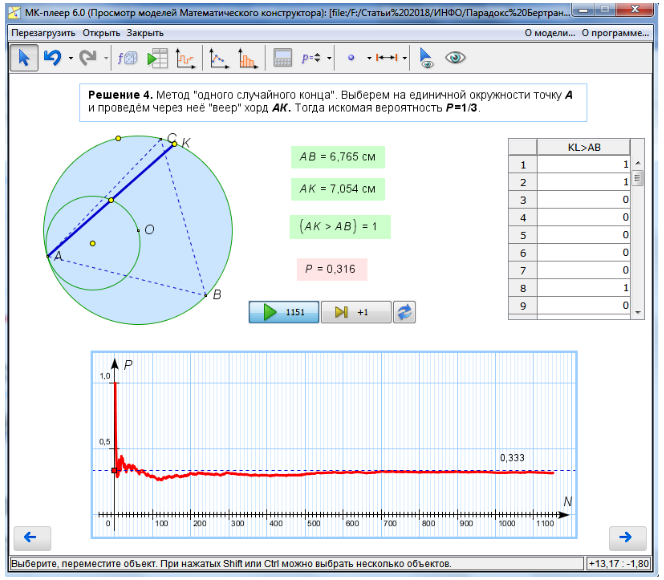
***Геометрическое место вершин треугольников, построенных на случайных хордах* – окружность единичного радиуса.**

Решение: **ΔADB строился как равносторонний, тогда $\Delta ABC = \Delta ADB$, и $\angle D = \angle C = 60°$, а сторона AB – общая. Поскольку ΔABC вписан в единичную окружность, тогда и окружность, описанная вокруг ΔADB – единичная.**

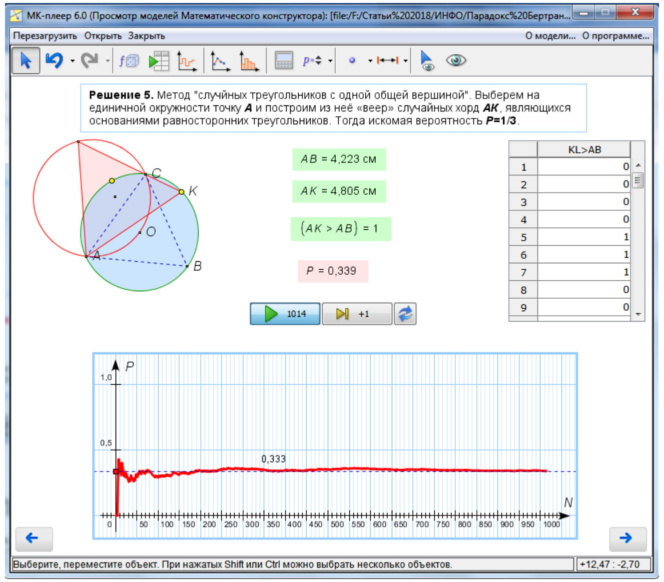
Поэтому длина $\smile$AB составляет 1/3 от длины окружности $R = 1$ – ГМ вершин случайных треугольников. Отсюда $P_{m>l} = 1/3$.

Виртуальные эксперименты

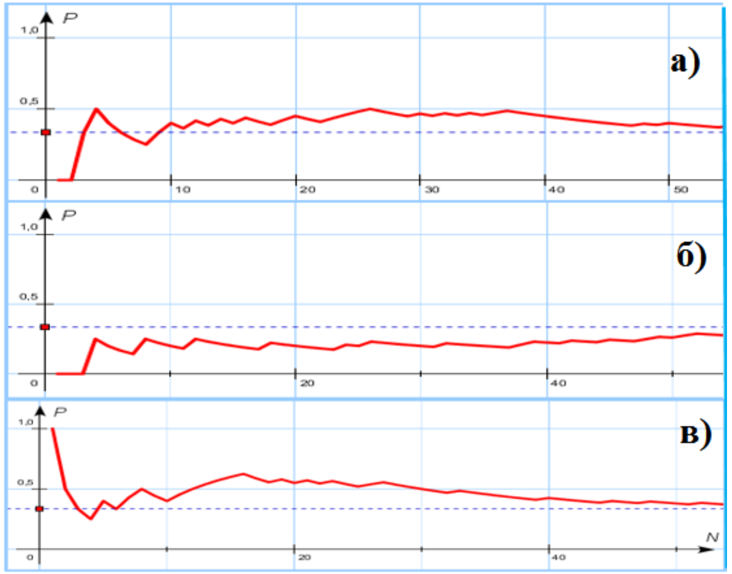
Четвёртое решение
«Метод одного случайного конца»



Пятое решение
«Метод случайных треугольников»



Переходные процессы при малом (< 50) числе испытаний



файл «5 решений Парадокса Бертрана.mkz»

Задача «Парадокс Бертрана» на уроке

Первая модель урока

(для учащихся с высоким уровнем математической подготовки)

Цель учебно-познавательной деятельности – научиться самостоятельному поиску решения вероятностных задач.

1. Задаются условия задачи.
2. Методом мозгового штурма учащиеся выдвигают различные версии относительно величины вероятности $P_{m>l}$, которые фактически являются гипотезами исследования.
3. Учитель отбирает несколько самых правдоподобных гипотез и предлагает учащимся обосновать каждую из них.
4. Учащиеся делятся на группы и самостоятельно выбирают способы решения для подтверждения или опровержения своей гипотезы, пользуясь алгоритмическими методами решения геометрических задач.
5. Обсуждение и сравнение полученных результатов.
6. Демонстрируются статистические эксперименты с помощью «1С: Математического конструктора 6.0».
7. Учащиеся сравнивают ход своих решений с условиями и результатами каждого виртуального эксперимента.

Задача «Парадокс Бертрана» на уроке

Вторая модель урока

(для учащихся со средним уровнем математической подготовки)

Цель учебно-познавательной деятельности – обосновать влияние начальных допущений на результаты решения вероятностных задач.

1. Задаются условия задачи.
2. Учитель обсуждает с учащимися возможные способы построения хорд.
3. Учащиеся делятся на группы, выбирают один из способов начальных допущений и пытаются найти для него решение.
4. Обсуждаются все предложенные решения.
5. В качестве проверки учитель демонстрирует виртуальные эксперименты с помощью «1С: Математического конструктора 6.0».

Задача «Парадокс Бертрана» на уроке

Третья модель урока

(для слабо мотивированных учащихся или для учащихся с низким уровнем математической подготовки)

Цель учебно-познавательной деятельности – обосновать неоднозначность решения вероятностных задач.

1. Задаются условия задачи.
2. Учитель демонстрирует способы построения хорд и возможные решения.
3. Учащиеся обсуждают решения фронтально или в группах и выбирают с их точки зрения «самое правдоподобное».
4. Учитель демонстрирует виртуальные эксперименты с помощью «1С: Математического конструктора 6.0».
5. Учащиеся делают вывод, что решение вероятностных задач может приводить к неоднозначному результату в зависимости от первоначальных допущений, влияющих на способ решения.

ВЫВОДЫ

Опыт решения парадокса Бертрана показывает, что старшеклассники, независимо от уровня предметной подготовки и отвечающих ему целей учебно-познавательной деятельности:

- осмысливают важность выдвижения гипотез при решении творческих, нетривиальных задач;
- осознают, насколько значимыми являются первоначальные допущения в вероятностных задачах, которые обусловливают не только выбор способа, но и результат решения задачи;
- учатся находить и разрешать противоречия, возникающие в процессе мыслительной деятельности.

Спасибо за внимание !